نشریهٔ علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک
DOI: 10.22067/jacsm.2022.75118.1095
سال سی وسه، شمارهٔ دو، ۱۴۰۰(۴۰-۲۳)

خمش غیرخطی تیرهای کامپوزیتی تقویت‌شده با پلاکت‌های گرافن بااستفاده از روش مربعات دیفرانسیلی هارمونیک*

مقاله پژوهشی

حسن شکراللهی[۱] رضا بیگ‌پور[۲]

چکیده *در این پژوهش تجزیه و تحلیل خمش غیرخطی یک تیر کامپوزیتی تقویت‌شــده توســط پلاکت‌های گرافن با توزیع غیریک‌نواخت دراستای ضخامت، بررسی و ارائه شده‌است. معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم در این پژوهش براساس نظریهٔ تغییر شکل برشی مرتبه اول و اصل حداقل انرژی پتانسیل، استخراج شده و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی هارمونیک حل شده‌است. خواص مکانیکی و مدول الاستیک مؤثر کامپوزیت تقویت‌شده با پلاکت گرافن بااستفاده از مدل میکرومکانیکی هالپین- تسای اصلاح‌شده محاسبه شده‌است. هم‌چنین از قاعدهٔ اختلاط برای تعیین نسبت پواسون مؤثر استفاده شده‌است. ابتدا مطالعات مقایسه‌ای بین تیرهای استاندارد کامپوزیتی مدرج تابعی و تیرهای تقویت شده با پلاکت‌های گرافن، ارائه شده‌است و سپس اثرات شرایط مرزی، کسر وزنی و الگوی توزیع پلاکت‌های گرافن و تعداد کل لایه‌ها بر ویژگی‌های خمش غیرخطی تیرهای کامپوزیتی مورد مطالعه قرار گرفته‌اســت. نتایج این پژوهش نشــان‌دهندهٔ قابلیت بالای روش پیشنهادی برای حل مسائل غیرخطی و به‌دست آوردن رفتار خمشی تیرهای کامپوزیتی تقویت‌شده، می‌باشد. هم‌چنین مطالعات پارامتری نشان می‌دهد با افزایش کســر وزنی پلاکت‌های گرافن، اســتحکام خمشــی تیر بهبود یافته و خیز تیر کاهش می‌یابد. علاوه‌بر این، افزایش تعداد کل لایه‌های کامپوزیت تقویت‌شده با پلاکت گرافن، سبب می‌شود که توزیع تنش دراستای ضخامت تیر هموارتر شود.*

واژه‌های کلیدی تحلیل غیرخطی تیر، خمش، کامپوزیت، پلاکت‌های گرافن، مربعات دیفرانسیلی هارمونیک.

مقدمه

در علوم مهندسی تقویت‌کننده‌ها یکی از مهم‌ترین عوامل ایجاد استحکام و سفتی در تیرهای کامپوزیتی به‌شمار می‌روند. با پیشرفت علم نانو، پرکنندهٔ جدیدی به نام پلاکت گرافن برای تقویت کامپوزیت‌ها معرفی شد، این پلاکت‌ها خواص مکانیکی، حرارتی، الکتریکی و نوری فوق العاده‌ای دارند [1-3]. علاوه‌بر این، گرافن‌ها متقاضیان زیادی را برای طراحی و پیشرفت کاربردهای مختلف سیستم‌های نانوالکترومکانیکی، مانند نانوکامپوزیت‌ها، حسگرهای جرم و گاز، ترانزیستورها و دستگاه‌های نیمه‌هادی به خود جذب کرده‌اند [4-6]. انواع مختلفی از محصولات گرافن، مانند پلاکت گرافن (Graphene Nanoplatelets) و اکسید گرافن، به‌طور گسترده در اجزای ساختاری سازه‌های کامپوزیتی استفاده می‌شود. همان‌طور که در کارهای تجربی و نظری نشان داده شده‌است، از آن‌جایی که گرافن دارای سطح وسیعی برای پیوند با زنجیره‌های پلیمری است، پلاکت‌های گرافن به‌عنوان نانوپرکننده‌های تقویت‌کننده در ماتریس پلیمری تعامل قوی‌تری نسبت‌به نانولولهٔ کربنی دارند [7]. پلیمرها به‌دلیل انعطاف‌پذیری مناسب و خواص فیزیکی مطلوب به‌عنوان ماتریس‌های الاستومری برای استفاده در سازه‌های کامپوزیتی بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند [8-10]. در مطالعات مختلفی نشان داده شده‌است که مقدار کمی گرافن می‌تواند رفتار خمشی

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۰/۱۱/۱۵ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۰/۱۲/۲۵ می‌باشد.
(۱) نویسندهٔ مسئول، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران. **Email:** hshokrollahi@khu.ac.ir
(۲) کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران.

تیر کامپوزیت اپوکسی گرافن را بهبود بخشد [11,12]. به‌علاوه، از آن‌جا که ساخت یک سازه با یک مادهٔ مدرج تابعی (Functionally graded material) که در آن مقدار پلاکت گرافن به‌طور پیوسته درراستای ضخامت تغییر می‌کند، بسیار دشوار است، از یک چیدمان چندلایه برای ساخت این سازه استفاده می‌شود. در این حالت، هر لایه دارای کسر وزن ثابتی است و توزیع مناسبی درراستای ضخامت لایه‌ها در نظر گرفته می‌شود [13,14]. ساختارهای نانوکامپوزیتی توسط بسیاری از محققان برای توصیف خواص و رفتار آن‌ها تحت بارهای استاتیکی و دینامیکی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. بیدگلی و عارفی [15] فرمول‌بندی را برای تجزیه و تحلیل ارتعاشات میکروصفحات کامپوزیت پلیمری مدرج تابعی و تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن ارائه کردند. آن‌ها وابستگی اندازهٔ میکروصفحات درجه‌بندی‌شده را با در نظر گرفتن نظریهٔ گرادیان کرنش مورد بررسی قرار دادند. نتایج عددی از نظر توزیع‌های مختلف نانوپلاکت‌های گرافن نشان داد که حداکثر سفتی برای توزیع سهمی و حداقل سفتی برای توزیع خطی پلاکت‌ها به‌دست می‌آید. یانگ و همکاران [16] تأثیر نانوذرات پلاکت گرافن بر واکنش‌های مکانیکی و دینامیکی ساختارهای تقویت‌شده مدرج تابعی را مورد مطالعه قرار دادند. تصاویر میکروسکوپ الکترونیکی از سطوح شکست ماتریس اپوکسی نشان داد که نانوپرکننده‌های ترکیبی نانولوله‌های کربنی چند جداره/پلاکت‌های گرافن نسبت‌به نانولوله‌های کربنی چند جداره و پلاکت‌های گرافن چندتایی انحلال‌پذیری بالاتری را نشان می‌دهند و سبب افزایش مقاومت کششی سازه می‌شوند. دانگ و همکاران [17] کمانش پوسته‌های استوانه‌ای نانوکامپوزیت متخلخل تقویت‌شده با گرافن طبقه‌بندی‌شده تابعی را با حرکت چرخشی بااستفاده از روش گالرکین مورد مطالعه قرار دادند. نتایج عددی آن‌ها نشان داد که افزودن مقدار کمی نانوپرکنندهٔ پلاکت گرافن می‌تواند تغییر شکل قبل از کمانش و عرض ناحیهٔ انتهایی کمانش را به میزان قابل توجهی کاهش و انواع بارهای بحرانی کمانش را افزایش دهد. با بررسی پوسته‌های استوانه‌ای با الگوهای متقارن و غیریک‌نواخت پلاکت‌های گرافن، توزیع متخلخل بهترین تأثیر تقویت‌کننده را بر سفتی کامپوزیت از خود نشان داد. براتی و شاهوردی [18] یک المان شبیه‌سازی عددی تیر مرتبه بالا را برای تجزیه و تحلیل ارتعاشات اجباری یک تیر نانوکامپوزیت تقویت‌شده با پلاکت‌های گرافن در محیط‌های حرارتی مورد بررسی قرار دادند. نتایج این بررسی نشان داد که خیز دینامیکی تیر به‌طور قابل توجهی تحت تأثیر کسر وزنی، نوع توزیع پلاکت‌ها گرافن، تغییر دما، بستر الاستیک و فرکانس تحریک بار دینامیکی اعمال‌شده می‌باشد. عارفی و همکاران [19] تأثیر پارامترهای متعددی مانند درصد کسر وزنی و تعداد لایه‌ها را بر تجزیه و تحلیل خمش غیرمحلی نانوتیرهای تقویت‌شده توسط پلاکت‌های گرافن ارائه کردند. تعداد کل لایه‌ها و هندسهٔ نانوپلاکت‌ها به‌طور قابل توجهی بر نتایج تأثیر می‌گذارد. به‌طور خاص، نانوپلاکت‌ها با طول بیشتر منجر به تیرهایی با ساختارهای سفت‌تر با کاهش کلی میدان جابه‌جایی می‌شوند.

ضیایی [20] در مطالعه‌ای ارتعاش آزاد ساختارهای چندلایهٔ گرافن و نیترید بور در محیط گرمایی و اثرات پارامتر مقیاس طول و تغییر دما بر فرکانس‌های طبیعی را مورد بررسی قرار داد. بدین منظور، نیروی واندروالس بین صفحات کامپوزیت را بااستفاده از معادلهٔ لنارد-جونز مدل‌سازی کرد و از نظریهٔ ورق اصلاح‌شدهٔ دو متغیره برای مدل‌سازی خواص ارتعاشی صفحات مرکب تک‌لایهٔ گرافن/برن نیترید یا صفحات مرکب با چیدمان عمودی استفاده کرد. نتایج این بررسی نشان داد که طرح لایه‌های گرافن و نیترید بور تنها بر فرکانس نرمال خارج از فاز نانوصفحات چندلایه تأثیر می‌گذارد و افزایش تعداد لایه‌های نیترید بور مورد استفاده در ساختار ناهمگن، سبب کاهش فرکانس طبیعی ساختار ترکیبی می‌شود. ورزندیان و همکاران [21] رفتار ارتعاش بعد از

کمانش یک نانوصفحهٔ گرافن دولایه تحت بار حرارتی را مورد بررسی و مطالعه قرار دادند. نانوصفحهٔ گرافن به‌صورت یک صفحهٔ اورتوتروپیک غیرکلاسیک با اثر مقیاس کوچک مدل‌سازی شده‌است. برای فرمول‌بندی این مطالعه از تئوری ورق کیرشهف و فرضیات غیرخطی فون کارمن و تئوری الاستیسیتهٔ غیرمحلی ایرینگن به‌ترتیب برای روابط کرنش- جابه‌جایی و اعمال اثر اندازه استفاده شده‌است. نتایج این مطالعه نشان داد که پارامتر مقیاس و تغییر دما تأثیر به‌سزایی در رفتار ارتعاش غیرخطی نانوساختارهای کمانش‌کرده دارند. بهرامی و همکاران [22] اثر هم‌افزایی دو نانوذرهٔ اکسید گرافن کاهش‌یافته و نانولولهٔ کربنی چندجداره با درصد وزنی‌ها متفاوت بر روی خواص مکانیکی نانوکامپوزیت اپوکسی با روش مخلوط‌سازی مستقیم، را مورد بررسی و مطالعه قرار دادند. در این مطالعه با آنالیز توزیع نانوذرات و نوع شکست، آنالیز سطح شکست نمونه‌ها، مشاهده شد با افزایش نسبت اختلاط نانوپرکننده‌ها مدول یانگ، تنش نهایی و تنش تسلیم به‌صورت چشم‌گیری افزایش یافته‌است.

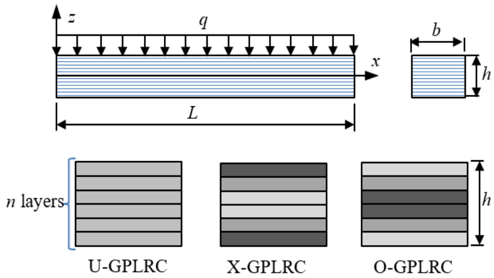
باتوجه به ماهیت غیرخطی پدیده‌های فیزیکی، مدل‌سازی ریاضی این پدیده‌ها به معادلات غیرخطی منتهی می‌شود. بنابراین، باید این معادلات بااستفاده از روش‌های عددی مناسبی حل شوند. مطالعات پیشین تنها به بررسی خمش غیرخطی تیرهای تقویت‌شده با پلاکت‌های گرافن برای موارد محدود شرایط مرزی پرداخته‌اند که در آن‌ها راه‌حل‌های فرم بسته (Closed-form expression) بااستفاده از سری فوریه ارائه شده‌است. در برخی دیگر از مقالات، روش ریتز مورد توجه قرارگرفته و معادلات حاکم و روش حل به‌صورت مختصر ارائه شده‌است.

هدف از پژوهش حاضر، تجزیه و تحلیل خمش غیرخطی یک تیر کامپوزیتی تقویت‌شده با پلاکت‌های گرافن (Graphene platelets reinforced composite) با توزیع یک‌نواخت و غیریک‌نواخت درراستای ضخامت است. معادلات دیفرانسیل حاکم براساس نظریهٔ تغییر شکل برشی مرتبه اول و بااستفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل استخراج شده‌است و سپس بااستفاده از روش مربعات دیفرانسیلی هارمونیک (Harmonic differential quadrature method (HDQM)) حل شده‌است. همان‌طور که در مرور مراجع گذشته اشاره شد، در کارهای غیرخطی، عمدتاً از روش‌های عددی دیگر (روش ریتز، المان محدود و...) استفاده شده‌است که از این جنبه، پژوهش حاضر نسبت‌به کارهای گذشته متمایز است. مدل میکرومکانیکی هالپین- تسای (Halpin–Tsai model) اصلاح‌شده برای تعیین مدول مؤثر یانگ تیرکامپوزیت تقویت‌شده با پلاکت‌های گرافن اعمال شده‌است. علاوه‌بر این، قانون اختلاط (Rule of mixture) برای تعریف نسبت پواسون مؤثر مورد استفاده قرار گرفته‌است. برای اطمینان از کاربرد این روش، مطالعات مقایسه‌ای برای تیرهای مدرج تابعی معمولی و تیرهای تقویت‌شده توسط پلاکت‌های گرافن، انجام گرفته و سپس اثرات شرایط مرزی، تعداد لایه‌ها، کسر وزنی و الگوی توزیع پلاکت‌های گرافن بر ویژگی‌های خمش غیرخطی تیرکامپوزیت تقویت‌شده با پلاکت‌های گرافن، مطالعه شده‌است.

فرمول‌بندی مسئله

فرمول‌بندی این مسئله شامل تیر کامپوزیت با n لایه پلاکت گرافن با ضخامت کل h و طول L می‌باشد که در شکل (۱) نمایش داده شده‌است. هر لایهٔ این تیر شامل ماتریس پلیمری تقویت‌شده توسط پلاکت‌های گرافن با ضخامت ثابت $h_1= h/n$ و کسر وزنی متمایز(Wg%) می‌باشد. درراستای ضخامت تیر، توزیع لایه‌های گرافن ممکن است به‌صورت یک‌نواخت و یا به‌صورت مدرج تابعی باشد. در این مطالعه الگوهای توزیع پلاکت‌های گرافن در نظر گرفته‌شده در شکل (۱) نشان داده شده‌است. در نوع توزیع X-GPLRC، لایه‌های بالا و پایین تیر دارای بیشترین کسر جرمی است درحالی‌که

توزیع این پارامتر، با حرکت به سطح میانی تیر، به‌صورت خطی کاهش می‌یابد. علاوه‌بر این، کسر وزنی توزیع پلاکت‌های گرافن در تیرO-GPLRC به‌صورت خطی از صفحات بیرونی به‌سمت صفحهٔ میانی افزایش می‌یابد. این بدان معناست که حداکثر مقدار کسر وزنی در سطح و لایهٔ میانی و حداقل میزان توزیع این پارامتر در لایه‌های خارجی مشاهده می‌شود.



شکل ۱ پیکربندی شماتیک تیرکامپوزیتی تقویت‌شده با سه الگوی مختلف توزیع پلاکت گرافن

کسر حجمی پلاکت گرافن برای لایهٔ k ام، به‌صورت $V_g^{(k)}$ تعریف می‌شود و به‌صورت فرمول‌بندی زیر نمایش داده می‌شود [23]:

$$U-GPLRC: V_g^{(k)} = \frac{W_g}{W_g + \frac{\rho_g}{\rho_m}(۱ - W_g)}$$

$$X-GPLRC: V_g^{(k)} = \frac{۲|۲k - n - ۱|W_g}{n\left[W_g + \frac{\rho_g}{\rho_m}(۱ - W_g)\right]}$$

$$O-GPLRC: V_g^{(k)} = \frac{۲(N - |۲k - n - ۱|)W_g}{n\left[W_g + \frac{\rho_g}{\rho_m}(۱ - W_g)\right]}$$

(۱)

برای تعریف پارامترها از n، ρ و W برای تعداد کل لایه‌های تیر، چگالی جرمی و کسر وزنی استفاده شده‌است و زیرنویس‌های g و m به‌ترتیب به پلاکت گرافن و ماتریس اشاره دارند. از آن‌جا که هندسه و ابعاد پرکننده‌های جامد تأثیر عمده‌ای بر خواص کامپوزیت‌های پلیمری دارند [24,25]، برای برآورد مدول مؤثر یانگ کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن از مدل میکرومکانیک اصلاح‌شده هالپین- تسای استفاده شده‌است [26]. نتایج تجربی صحت‌سنجی مدل اصلاح‌شدهٔ هالپین- تسای را برای ذرات پلاکت‌های گرافن با توزیع تصادفی توسط شکریه و همکاران بررسی و تأیید شده‌است [27]. درنتیجه، مدول یانگ مؤثر لایهٔ k ام کامپوزیت مطرح شده به شرح رابطهٔ (۲) با جای‌گذاری در رابطهٔ (۳) تعریف شده‌است.

$$\xi_L = \frac{2a_g}{t_g}, \xi_T = \frac{2b_g}{t_g}$$
$$\eta_L = \frac{\frac{E_g}{E_m} - 1}{\frac{E_g}{E_m} + \xi_L}, \eta_T = \frac{\frac{E_g}{E_m} - 1}{\frac{E_g}{E_m} + \xi_T}$$

(۲)

$$E^{(k)} = \frac{3}{8}\frac{1 + \xi_L\eta_L V_g^{(k)}}{1 - \eta_L V_g^{(k)}}E_m + \frac{5}{8}\frac{1 + \xi_T\eta_T V_g^{(k)}}{1 - \eta_T V_g^{(k)}}E_m$$

(۳)

پارامتر مدول یانگ با E و طول، عرض و ضخامت نانوپرکننده های پلاکت گرافن همچنین به‌ترتیب با اندیس‌های a_g، b_g و t_g نمایش داده می‌شوند. علاوه‌بر این، طبق قاعدهٔ اختلاط، نسبت پواسون (ν) لایهٔ k ام تیر کامپوزیت تعریف‌شده به‌صورت رابطهٔ (٤) مطرح می‌شود.

$$\nu^{(k)} = \nu_m\left(۱ - V_g^{(k)}\right) + \nu_g V_g^{(k)} \quad (٤)$$

طبق نظریهٔ تغییر شکل برشی مرتبه اول (First-Order Shear Deformation Theory) میدان جابه‌جایی تیر و کرنش اجزای تیر شامل معادلات غیرخطی فون‌کارمن (Von Kármán) به شرح زیر است:

$$u(x,z) = u_{.}(x) + z\phi(x)$$
$$w(x,z) = w_{.}(x)$$

(٥)

$$\gamma_{xz}(x,z) = \phi(x) + \frac{dw_{\cdot}(x)}{dx}\varepsilon_{yy}(x,z) = \varepsilon_{zz}(x,z) = \gamma_{xy}(x,z) = \gamma_{yz}(x,z) = \cdot$$

(٦)

باتوجه به مدل ساختاری تنش- کرنش الاستیک خطی، تنش های درون لا یهٔ k ام تیر به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{xx}^{(k)}(x,z) = \frac{E^{(k)}}{1-(\nu^{(k)})^2}\left[\frac{du_0(x)}{dx} + z\frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)^2\right]$$

$$\tau_{xz}^{(k)}(x,z) = \frac{E^{(k)}}{2(1+\nu^{(k)})}\left(\phi(x) + \frac{dw_0(x)}{dx}\right)$$

$$\sigma_{yy}^{(k)}(x,z) = \sigma_{zz}^{(k)}(x,z) = \tau_{xy}^{(k)}(x,z) = \tau_{yz}^{(k)}(x,z) = 0$$

(٧)

برای دست‌یابی به معادلات حاکم مدنظر، از اصل حداقل انرژی پتانسیل به شرح رابطهٔ (٨) استفاده می‌شود که در آن Π انرژی پتانسیل، U انرژی جنبشی و S کار انجام‌شده توسط نیروهای خارجی است.

$$\delta\prod = \delta(U - S) = 0 \qquad (٨)$$

$$U = \frac{b}{2}\int_0^L\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{h}{2}-k\Delta h}^{\frac{h}{2}-(k-1)\Delta h}\left(\sigma_{xx}^k\varepsilon_{xx} + k_s\tau_{xz}^k\gamma_{xz}\right)dz\right)dx$$

(٩)

پارامتر عرض تیر و ضریب تصحیح برشی به‌ترتیب با b و k_s نمایش داده شده‌اند که در این معادلات مقادیر ضریب تصحیح برشی برابر با $\frac{5}{6}$ فرض می‌شود. کار انجام‌شده توسط نیروهای خارجی q(x)، برابر است با:

$$S = b\int_0^L q(x)w_0(x)dx \qquad (١٠)$$

با جایگزینی U و S در معادلهٔ (٨) و با یکپارچه‌سازی معادلهٔ به‌دست‌آمده، معادلهٔ حاکم غیرخطی و شرایط مرزی تیر کامپوزیتی تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن به شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$A_0\frac{d^2u_0}{dx^2} + A_1\frac{d^2\phi}{dx^2} + A_0\frac{dw_0}{dx}\frac{d^2w}{dx^2} = 0 \qquad (١١)$$

$$A_1\frac{d^2u_0}{dx^2} + A_2\frac{d^2\phi}{dx^2} + A_1\frac{dw_0}{dx}\frac{d^2w}{dx^2} - k_sB_0\left(\phi + \frac{dw_0}{dx}\right) = 0$$

(١٢)

$$A_0\frac{d^2u_0}{dx^2}\frac{dw_0}{dx} + A_1\frac{d^2\phi}{dx^2}\frac{dw_0}{dx} + \frac{3}{2}A_0\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2\frac{d^2w}{dx^2} + A_0\frac{du_0}{dx}\frac{d^2w_0}{dx^2} + A_1\frac{d\phi}{dx}\frac{d^2w_0}{dx^2} + k_sB_0\left(\frac{d\phi}{dx} + \frac{d^2w_0}{dx^2}\right) + q = 0$$

(١٣)

$$\left[A_0\frac{du_0}{dx} + A_1\frac{d\phi}{dx} + \frac{1}{2}A_0\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2\right]\delta u_0\Big|_{x=0}^{x=L} + \left[A_1\frac{du_0}{dx} + A_2\frac{d\phi}{dx} + \frac{1}{2}A_1\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2\right]\delta\phi\Big|_{x=0}^{x=L} + \left[A_0\frac{du_0}{dx}\frac{dw_0}{dx} + A_1\frac{d\phi}{dx}\frac{dw_0}{dx} + \frac{1}{2}A_0\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2\frac{dw_0}{dx} + k_sB_0\left(\phi + \frac{dw_0}{dx}\right)\right]\delta w_0\Big|_{x=0}^{x=L} = 0$$

(١٤)

که A_0، A_1، A_2 و B_0 پارامترهای سفتی هستند که به شرح معادلهٔ (١٥) محاسبه می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix}A_0\\A_1\\A_2\\B_0\end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{h}{2}-k\Delta h}^{\frac{h}{2}-(k-1)\Delta h}\frac{E^{(k)}}{1-(\nu^{(k)})^2}\begin{Bmatrix}1\\z\\z^2\\\frac{1-\nu^{(k)}}{2}\end{Bmatrix}dz$$

(١٥)

شرایط مرزی مختلف برای تیر غیرخطی مطرح‌شده را می‌توان از رابطهٔ (١٤) فرض کرد. در این مطالعه، چهار نوع شرایط مرزی شامل گیردار (C)، پین (P)، کشویی (S) و آزاد (F)، به شرح زیر در نظر گرفته شده‌است.

$$\text{Clamped(C)}: u_0 = \phi = w_0$$

$$\text{Pinned(P)}: u_0 = w_0 = A_1\frac{du_0}{dx}$$

$$+A_2\frac{d\phi}{dx}+\frac{1}{2}A_1\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2=0$$

$$\text{Sliding(S)}: w_0=A_0\frac{du_0}{dx}+A_1\frac{d\phi}{dx}+\frac{1}{2}A_0\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2$$

$$=A_1\frac{du_0}{dx}+A_2\frac{d\phi}{dx}+\frac{1}{2}A_1\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2=0$$

$$\text{Free(F)}: A_0\frac{du_0}{dx}+A_1\frac{d\phi}{dx}+\frac{1}{2}A_0\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2$$

$$=A_1\frac{du_0}{dx}+A_2\frac{d\phi}{dx}+\frac{1}{2}A_1\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2$$

$$=A_0\frac{du_0}{dx}\frac{dw_0}{dx}+A_1\frac{d\phi}{dx}\frac{dw_0}{dx}+\frac{1}{2}A_0\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^3$$

$$+k_sB_0\left(\phi+\frac{dw_0}{dx}\right)=0$$

(۱٦)

روش مربعات دیفرانسیلی هارمونیک برای حل معادلات غیرخطی به‌دست‌آمده، استفاده شده‌است. در این روش، مشتق جزئی یک تابع نسبت‌به متغیر مکانی در یک نقطهٔ گسسته، با جمع خطی مقادیر تابع وزنی در تمام نقاط مجزا در میدان متغیر تقریب‌زده می‌شود. به‌عنوان مثال، اگر $F(x)$ یک تابع در محدودهٔ $0<x<L$ باشد و در این محدوده N نقطهٔ گسسته تعریف شده باشد، مشتق مرتبه j ام در نقطه x_i به‌صورت رابطهٔ (۱۷) بیان می‌شود:

$$\frac{d^jF(x_i)}{dx^j}=\sum_{k=1}^{N}A_{ik}^{(j)}F(x_k); j=1,2,\ldots, N-1 \quad (۱۷)$$

$A_{ik}^{(j)}$ ضرایب وزنی مربوط به مرتبه j ام مشتق تابع $F(x)$ نسبت‌به x در نقاط گسستهٔ x_i درنظر گرفته شده‌است. باتوجه به معادلات حاکم و شرایط مرزی به‌دست آمده در این پژوهش، لازم است مشتقات مرتبه اول و دوم محاسبه شوند. مطابق روش مربعات دیفرانسیلی هارمونیک، ضرایب وزنی $A_{ij}^{(1)}$ و $A_{ij}^{(2)}$، برای $i\neq j$ به‌صورت رابطهٔ (۱۸) خواهند بود:

$$A_{ij}^{(1)}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)P(x_i)}{P(x_j)\sin[(x_i-x_j)\pi/2]}; i, j=1,2,\ldots, N$$

$$A_{ij}^{(2)}=$$
$$A_{ij}^{(1)}\left[2A_{ij}^{(1)}-\pi\cot\left(\frac{x_i-x_j}{2}\pi\right)\right]; i, j=1,2,\ldots, N$$

(۱۸)

که در آن

$$P(x_i)=\prod_{j=1,j\neq i}^{N}\sin\left(\frac{x_i-x_j}{2}\pi\right); j=1,2,\ldots, N \quad (۱۹)$$

برای $i=j$

$$A_{ij}^{(k)}=\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}^{(k)}; k=1,2; i=1,2,\ldots, N \quad (۲۰)$$

لازم به ذکر است که در این پژوهش، توزیع نقاط بااستفاده از تابع چبیشف- گوس- لوباتو (Chebyshev-Gauss-Lobatto) به‌صورت $x_i=\frac{1}{2L}\left[1-\cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right)\right]$ در نظر گرفته شده‌است. اطلاعات بیشتر درمورد روش مربعات دیفرانسیلی هارمونیک را می‌توان به‌طور مفصل در مرجع [28] مطالعه کرد. اکنون بااستفاده از روش مربعات دیفرانسیلی هارمونیک برای تفکیک سیستم معادلات (۱۰)-(۱٤)، معادلات غیرخطی زیر به‌دست می‌آید:

$$[K_L]\begin{Bmatrix}\{u\}_N\\\{\phi\}_N\\\{w\}_N\end{Bmatrix}+[K_{NL}]\begin{Bmatrix}\{\{u\}\{w\}\}_{N^2}\\\{\{\phi\}\{w\}\}_{N^2}\\\{\{w\}\{w\}\}_{N^2}\\\{\{w\}\{w\}\{w\}\}_{N^3}\end{Bmatrix}=$$
$$\begin{Bmatrix}\{0\}_{2N+1}\\\{q\}_{N-2}\\\{0\}_1\end{Bmatrix}$$

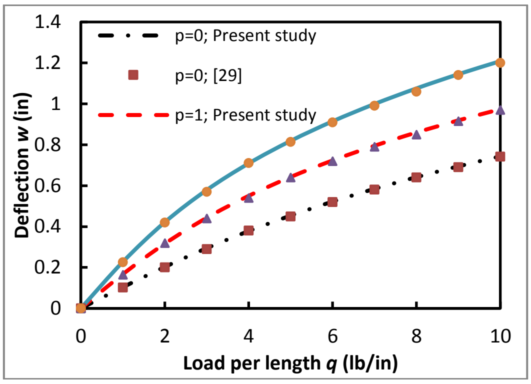
(۲۱)

که در آن K_L و K_{NL} ماتریس سفتی خطی و غیرخطی هستند و به‌ترتیب دارای ابعاد ۳N×۳N و(۳N×(۳N^۳×N می‌باشند. برای حل معادلات غیرخطی، یک برنامهٔ رایانه‌ای برمبنای یک حل تکرار محور براساس روش نیوتن- رافسون بااستفاده از برنامهٔ متلب و مطابق فرمول‌های ارائه‌شده در این‌جا نوشته شده‌است. بااستفاده از این برنامه، میدان‌های جابه‌جایی و تنش‌های تیر به‌دست می‌آیند. لازم به ذکر است که با در نظر گرفتن $[K_{NL}]=[0]$ پاسخ خطی تیر به‌دست می‌آید.

نتایج و بحث

در ابتدای این بخش، صحت روش پیشنهادی مورد

ارزیابی قرار می‌گیرد. برای بررسی هم‌گرایی روش حل پیشنهادی، چندین مدل با تعداد نقاط مختلف شبکه مورد بررسی قرار گرفت. این مطالعه هم‌گرایی نشان داد که انتخاب ۳۱ نقطه شبکه درراستای x، با توزیع تابع چبیشف- گوس- لوباتو، در مسائل مورد بررسی، پاسخ مطمئنی را ارائه می‌دهد. نتایج خمش غیرخطی تیر در شکل (۲) برای خیز تیرهای مدرج تابعی با شرایط مرزی دو انتها گیردار، در مقایسه با نتایج گزارش‌شده توسط ردی و همکاران [29]، ارائه شده‌است. مدول یانگ مواد مدرج تابعی در جهت ضخامت بااستفاده از رابطۀ $E(z) = (E_1 - E_2)\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^p + E_2$ به‌دست می‌آید، که در آن p اندیس مدرج تابعی خواص مواد است. خواص مادی و هندسی تیر به این صورت فرض شده‌است: E_1 =۳۰×۱۰^۶ psi، E_2 =۱۰×۱۰^۶ psi، ν = ۰/٤، b/h =۱، b ۱in = و L/h =۱۰۰ است. همان‌طور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود، نتایج فعلی با روش مربعات دیفرانسیلی هارمونیک با نتایج قبلی مطابقت دارد.



شکل ۲ نمودار خیز وسط تیر برحسب بار برای تیرهای دوسر گیردار مدرج تابعی

برای بررسی بیشتر روش پیشنهادی، مطالعه‌ای که توسط فنگ و همکاران انجام شده‌است [14]، در نظر گرفته شده‌است. در این حالت، ماتریس پلیمری اپوکسی با خواص مکانیکی برابر با E_m =۲/۸۵ GPa و ρ_m =۱۲۰۰ kg/m³ فرض می‌شود. این تیر شامل ۱۰ لایه با ضخامت، ابعاد، مدول یانگ و چگالی جرمی پلاکت‌های گرافن به‌ترتیب برابر با h=۰/۱ m، L/h =۲۰، a_g =۲/۵μm، b_g= ۱/۵μm، t_g=۱/۵μm، E_g= ۱۰۱۰GPa و ρ_g = ۱۰٦۰kg/m³ در نظرگرفته شد [13]. حداکثر خیز تیر پلاکت گرافن- اپوکسی با شرایط مرزی و کسر وزنی پلاکت‌های گرافن مختلف، در جدول (۱) برای بار یک‌نواخت بدون بعد Q = ۰/۰۰۱ ارائه شده‌است ($Q = \frac{qL^2(1-\nu^2)}{h^2E_m}$). هم‌چنین، به‌عنوان نمونه‌ای برای چگونگی هم‌گرایی روش حل، نتایج هم‌گرایی این مطالعه در شکل (۳) نشان داده شده‌است. همان‌طور که در این شکل نشان داده شده‌است، روش حل از سرعت هم‌گرایی مناسبی برخوردار است. باتوجه به جدول (۱)، نتایج حاضر به‌خوبی با نتایج گزارش‌شده در مطالعات قبل (مرجع [13]) مطابقت دارد. لازم به ذکر است که در مرجع [13] از روش ریتز برای حل معادلات استفاده شده‌است. باتوجه به در نظر گرفتن فرم سری چندجمله‌ای برای تابع مفروض جابه‌جایی‌ها، شرایط مرزی محدود شده‌است اما در روش مربعات دیفرانسیلی، این محدودیت وجود ندارد و فرمول‌بندی ارائه‌شده قابل کاربرد برای شرایط مرزی مختلف، از جمله شرط مرزی آزاد، خواهد بود.

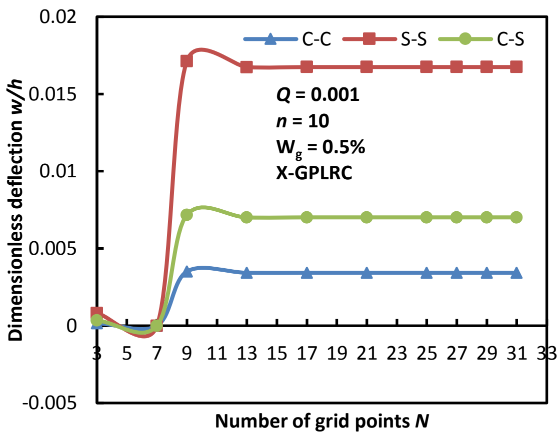
پس از تأیید روش حل پیشـــنهادی، در این بخش تجزیه و تحلیل پارامتری انجام شـــده و نتایج آن مورد بررسی قرار گرفته‌است.

تیرهای کامپوزیتی تقویت‌شده با پلاکت‌های گرافن چندلایه با خصوصیات h =۰/۰۱ m و L/h =۲۰ در نظر گرفته شده‌است. هر لایه این تیر کامپوزیتی ترکیبی از اپوکسی با مدول یانگ E_m =۳ GPa ، چگالی جرمی ρ_m=۱۲۰۰ kg/m³ ، نسبت پواسون ν_m= ۰/۳۸، و پلاکت‌های گرافن با مدول یانگ E_g =۱۰۱۰GPa، چگالی جرمی ρ_g=۱۰٦۲/۵ kg/m³ ، نسبت پواسون ν_g=۰/۱۸٦ و طول a_g=۲/۵ μm، عرض b_g=۱/۵ μm و ضخامت t_g =۱/۵ μm می‌باشد [7,30].

شکل (٤) خیز بدون بعد تیر را برحسب موقعیت طولی تیر، برای شرایط مرزی مختلف برای هر دو تحلیل خطی و غیرخطی با بار بدون بعد Q =۰/۰۲، تعداد لایه‌هایی برابر با n=۱۰، کسر وزنی W_g = ۰/۵٪ و الگوی توزیع X-GPLRC، نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل (٤) نمایان است، بااستفاده از تحلیل غیرخطی، خیز تیر کاهش می‌یابد. علاوه‌بر این، با کاهش درجهٔ آزادی، خیز تیر افزایش می‌یابد. برای سایر مقادیر بار بدون بعد، حداکثر خیز تیر در شکل (٥) نشان داده شده‌است. همان‌طور که در شکل (٥) قابل مشاهده‌است، افزایش بار منجر به تفاوت معناداری بین تحلیل‌های خطی و غیرخطی می‌شود؛ به‌عنوان مثال، این اختلاف بین نتایج خطی و غیرخطی، برای بار بدون بعد Q=۰/۰۲، با شرایط مرزی C-C، C-P ، P-P و C-F به‌ترتیب ۱٦٪، ٦٤٪، ۲۱۱٪ و ٤۳۳٪ می‌باشد.

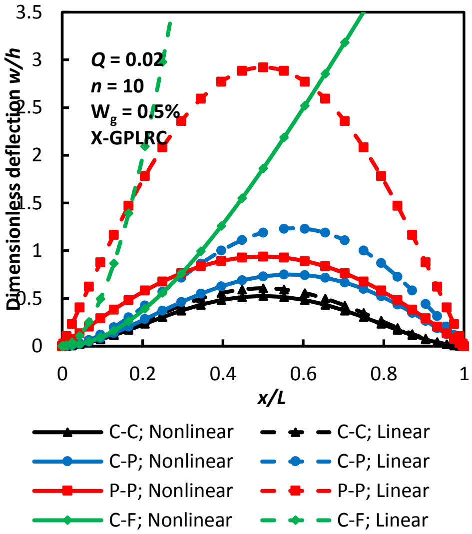
جدول ۱ حداکثر خیز بدون بعد تیرهای کامپوزیتی پلاکت گرافن/اپوکسی

	W_g%	U-GPLRC			X-GPLRC		
		مطالعهٔ حاضر	مرجع [13]	درصد اختلاف	مطالعهٔ حاضر	مرجع [13]	درصد اختلاف
C-C	۰/۵	۰/۰۰٤٤٤۱	۰/۰۰٤۷٤۵	٦/٪.٤	۰/۰۰۳٤۳۰	۰/۰۰۳٦۸۰	٦/٪.۸
	۱	۰/۰۰۲۷۱۸	۰/۰۰۲۹۰۲	٦/٪.۳	۰/۰۰۱۹۹۷	۰/۰۰۲۱٤٤	٦/٪.۹
	۱/۵	۰/۰۰۱۹۵۸	۰/۰۰۲۰۹۰	٦/٪.۳	۰/۰۰۱٤۰۸	۰/۰۰۱۵۱۳	٦/٪.۹
S-S	۰/۵	۰/۰۲۱۸۲۱	۰/۰۲۲۹۸۸	۵/٪.۱	۰/۰۱٦۷٤۲	۰/۰۱۷٦۵۹	۵/٪.۲
	۱	۰/۰۱۳۳٤٤	۰/۰۱٤۰۵۸	۵/٪.۱	۰/۰۰۹۷۳۰	۰/۰۱۰۲٦۹	۵/٪.۲
	۱/۵	۰/۰۰۹٦۱۰	۰/۰۱۰۱۲٤	۵/٪.۱	۰/۰۰٦۸۵٦	۰/۰۰۷۲۳۹	۵/٪.۳
C-S	۰/۵	۰/۰۰۹۱۱٦	۰/۰۰۹٦۹۷	٦/٪.۰	۰/۰۰۷۰۱۲	۰/۰۰۷٤۸۱	٦/٪.۳
	۱	۰/۰۰۵۵۷۵	۰/۰۰۵۷۱۲	۲/٪.٤	۰/۰۰٤۰۷۸	۰/۰۰٤۱۹۷	۲/٪.۸
	۱/۵	۰/۰۰٤۰۱۵	۰/۰۰٤۱۱٤	۲/٪.٤	۰/۰۰۲۸۷٤	۰/۰۰۲۹٦۰	۲/٪.۹

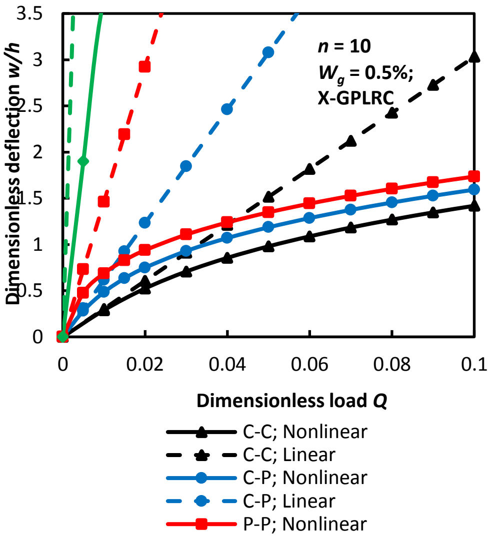


شکل ۳ نمودار خیز بی‌بعد تیر برحسب تعداد نقاط گرهی مورد استفاده در روش حل برای شرایط مرزی مختلف

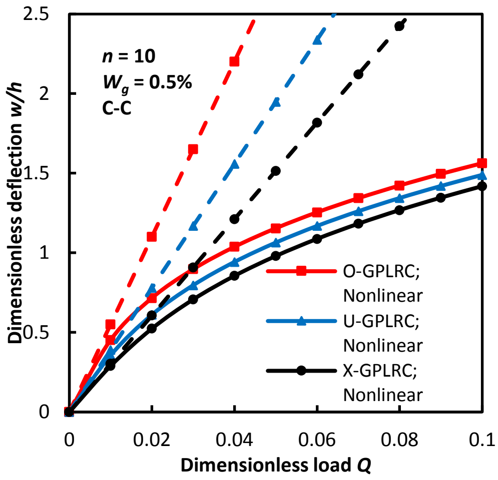
به‌منظور بررسی تأثیر الگوهای توزیع پلاکت‌های گرافن بر رفتار خمشی تیرهای تقویت‌شده با ذرات گرافن، مطالعهٔ دیگری انجام شده‌است. شکل‌های (٦) و (٧) به‌ترتیب حداکثر خیز و تنش نرمال بدون بعد را برای یک تیر دو سر گیردار (C-C) با سه الگوی توزیع متفاوت پلاکت‌های گرافن نشان می‌دهند.



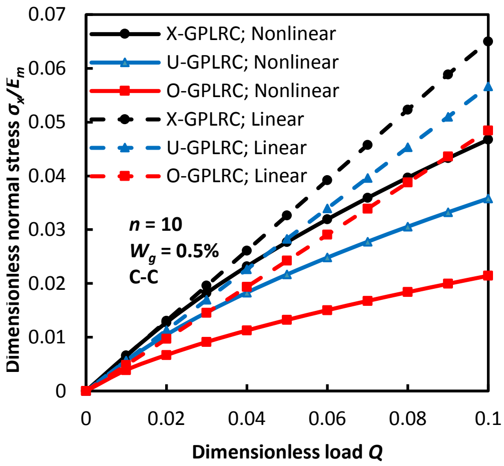
شکل ٤ نمودار خیز بی‌بعد تیر برحسب موقعیت مکانی بی‌بعد برای شرایط مرزی مختلف



شکل ٥ نمودار ماکزیمم خیز بی‌بعد برحسب بار بی‌بعد واردشده بر تیر برای شرایط مرزی مختلف



شکل ٦ نمودار ماکزیمم خیز بدون بعد تیر تقویت شده با نانوپلاکت‌های گرافن با توزیع‌های متفاوت



شکل ٧ نمودار ماکزیمم تنش نرمال بی‌بعد تیر تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن با توزیع‌های متفاوت

همان‌طور که در شکل (٦) مشاهده می‌شود، تیرهای کامپوزیتی با توزیع O-GPLRC و X-GPLRC به‌ترتیب دارای بیشترین و کمترین مقدار خیز هستند. این نتایج نشان می‌دهد که برای کاهش خیز، الگوی X-GPLRC کارآمدترین نوع توزیع نانوپلاکت‌ها است. الگوی X-GPLRC تعداد بیشتری نانوپرکنندهٔ پلاکت گرافن را در قسمت‌های بالا و پایین تیر دارد و این امر منجر به افزایش سفتی خمشی تیر و کاهش خیز تیر

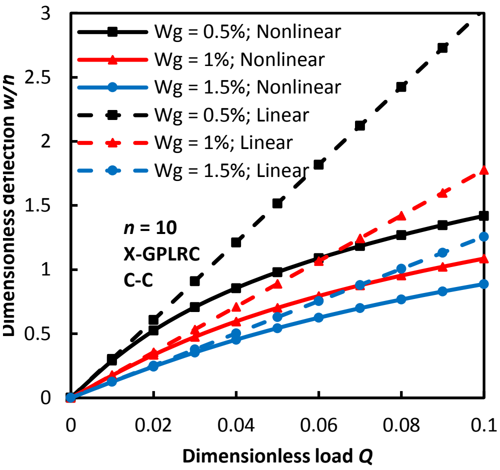
می‌شود. باتوجه به شکل (۷) این توزیع نانوپرکننده‌ها هم‌چنین منجر به ایجاد بیشترین تنش نرمال در بین الگوهای مورد مطالعه می‌شود. از طرف دیگر، در الگوی O-GPLRC تعداد بیشتری نانوپرکنندهٔ پلاکت گرافن در نزدیکی سطوح میانی تیر تعبیه شده‌است، این بدان معناست که سفتی خمشی تیر با این توزیع نانوپرکننده‌ها کاهش می‌یابد. هم‌چنین تأثیر الگوهای توزیع پلاکت‌های گرافن بر عملکرد خمشی تیرهای کامپوزیت تقویت‌شده برای تیرهایی با شرایط مرزی C-P، P-P وC-C با کسر وزنی ۰/۵٪ در جدول (۲) به‌همراه نتایج به‌دست‌آمده فهرست شده‌است. نکتهٔ قابل توجه این است که نتایج مشابهی برای سایر کسرهای وزنی GPL به‌دست می‌آید که به‌منظور رعایت اختصار، در این‌جا ارائه نشده‌است.

شکل‌های (۸) و (۹) اثرات کسر وزنی بر رفتار تیر تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن با کسرهای وزنی ۰/۵، ۱ و ۱/۵٪ را مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. همان‌طور که در این نمودارها مشاهده می‌شود، با افزودن پلاکت‌های بیشتر به ماتریس، خیز تیر کاهش و تنش‌های موجود در آن افزایش می‌یابد. با بررسی این بخش، می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش کسر وزنی پلاکت‌های گرافن، سفتی خمشی تیر بهبود می‌یابد. همان‌طور که در شکل‌های (۸) و (۹) مشاهده می‌شود، با افزایش کسر وزنی نانوپلاکت‌های گرافن، اختلاف بین نتایج خطی و غیرخطی کاهش می‌یابد. به‌عنوان مثال، ماکزیمم اختلاف نسبی جابه‌جایی‌های خطی و غیرخطی برای کسرهای وزنی ۰/۵، ۱ و ۱/۵٪ به‌ترتیب برابر با ۱۱۳، ٦۳ و ٤۲٪، و به‌طور مشابه برای تنش‌ها، ۳۹، ۲۱ و ۱۲٪ است. این امر ناشی از افزایش استحکام خمشی تیر است. هم‌چنان‌که در شکل‌های (٦) و (۷) نیز با تغییر الگوی توزیع، ترتیب استحکام خمشی در ترتیب اختلاف بین نتایج خطی و غیرخطی مشاهده می‌شود. یعنی با تغییر الگوی توزیع از O به U و از U به X، هم‌چنان‌که استحکام خمشی افزایش می‌باید اختلاف بین نتایج خطی و غیرخطی هم کاهش می‌یابد.

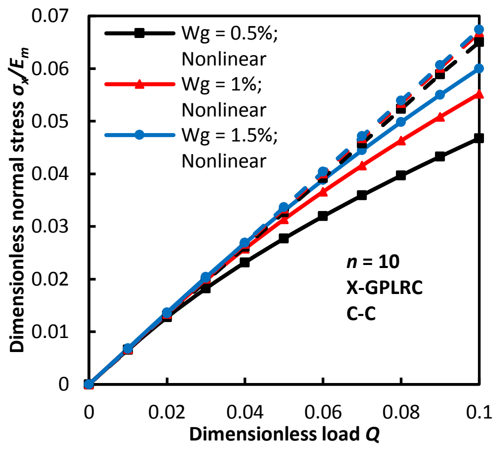
جدول ۲ حداکثر خیز و تنش نرمال بدون بعد تیر تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن با توزیع‌های متفاوت

		Q = ۰/۰۱			Q = ۰/۰۲			Q = ۰/۰٤		
		X-GPLRC	O-GPLRC	U-GPLRC	X-GPLRC	O-GPLRC	U-GPLRC	X-GPLRC	O-GPLRC	U-GPLRC
w/h; خطی	C-C	۰/۲۸۹۲۲	۰/٤٥۲۸۸	۰/۳٥٦۲٦	۰/٥۲۳۸۸	۰/۷۱٦۳۰	۰/٦۱۰۹۹	۰/۸٥٥٥٥	۱/۰۳۷۹٦	۰/۹٤۲۹۱
	C-P	۰/٤۸٤۱۰	۰/٦۲۱٥۱	۰/٥٤۸٥۷	۰/۷٤۸٥٥	۰/۸۹۱٤۰	۰/۸۰۸٤۰	۱/۰٦۹٦۲	۱/۱۷۱۰٤	۰/۱۱۹۷۱
	P-P	۰/٦۸۷۱۸	۰/۷٥۸٤۲	۰/۷۲۲۷۷	۰/۹۳۸۱٥	۰/۹۹۳۳٤	۰/۹٦٦۱۱	۱/۲۳۸۲۳	۱/۲۷۹۲٥	۱/۲٥۹۳۱
w/h; غیرخطی	C-C	۰/۳۰۳۱۱	۰/٥٥۰٥۷	۰/۳۸۹۷۹	۰/٦۰٦۲۱	۱/۱۰۱۱٤	۰/۷۷۹٥۸	۱/۲۱۲٤۲	۲/۲۰۲۹۹	۱/٥٥۹۱۷
	C-P	۰/٦۱٥۳۱	۱/۱۲۷۷٥	۰/۷۹٤۸۲	۱/۲۳۰٦۳	۲/۲٥٥٥۱	۱/٥۸۹٦۳	۰/٤٦۱۲٦	٤/٥۱۱۰۱	۳/۱۷۹۲۷
	P-P	۰/٤٦۰۹۰	۲/٦۹۸۲٤	۱/۸۹٤۳۲	۲/۹۲۱۸۱	٥/۳۹٦٤۸	۳/۷۸۸٦٤	٥/۸٤۳٦۲	۱۰/۷۹۲۹	۷/٥۷۷۲۹
σ_x/E_m; خطی	C-C	۰/۰۰٦٦۰	۰/۰۰۳۹۰	۰/۰۰٥٦۱	۰/۰۱۲۷٥	۰/۰۰٦۷۰	۰/۰۱۰٤٦	۰/۰۲۳۱۷	۰/۰۱۱۲٦	۰/۰۱۸۳۱
	C-P	۰/۰۰۹۱۲	۰/۰۰٤٥٦	۰/۰۰۷۳۱	۰/۰۱٦۰۰	۰/۰۰۷٥۰	۰/۰۱۲٤۲	۰/۰۲٦۷۳	۰/۰۱۲۱۰	۰/۰۲۰۳٥
	P-P	۰/۰۰٦۱٦	۰/۰۰۳۳۳	۰/۰۰٤۳٦	۰/۰۰۹۱٦	۰/۰۰٥۰۲	۰/۰۰٦۳۲	۱/۰۱۳۲۸	۰/۰۰۷٥٤	۰/۰۰۹۰۳
σ_x/E_m; غیرخطی	C-C	۰/۰۰٦۲٥	۰/۰۰٤۸٤	۰/۰۰٥٦٥	۰/۰۱۳۰٥	۰/۰۰۹٦۹	۰/۰۱۱۳۱	۰/۰۲٦۱۲	۰/۰۳۱۹۷	۰/۰۲۲٦٤
	C-P	۰/۰۰۹۷٦	۰/۰۱۳٤۷	۰/۰۰۸٤٦	۰/۰۱۹٥۲	۰/۰٥۳٥٦	۰/۰۱۹٤٤	۰/۰٦٦۲۰	۰/۲۱۳۹۱	۰/۰۷۲٥٦
	P-P	۰/۰۱۷۲٥	۰/۰٥۲۷۰	۰/۰۱۸٥۳	۰/۰٦۳٦۳	۰/۲۱۰٥٦	۰/۰۷۰٥۰	۰/۲٤۹۱۱	۰/۸٤۲۰۹	۰/۲۷۸۲۸

لازم به ذکر است که باتوجه به نتایج تجربی ارائه‌شده در مراجع مختلف، افزودن مقادیر بسیار کم پلاکت گرافن به تیر، خواص را به‌صورت قابل ملاحظه‌ای بهبود می‌بخشد و البته محدودیت‌های ساخت هم مانع افزایش درصد وزنی گرافن می‌شود. نتایج گزارش‌شده در مراجع نشان می‌دهد که افزایش بیشتر گرافن، اثر تقویتی ندارد و باعث کاهش خواص استحکامی خواهد شد (به‌دلیل پراکندگی غیریکنواخت که در درصدهای بالاتر اتفاق می‌افتد). معمولاً درصد وزنی بیشتر از حدود ۲ تا ۵٪ توصیه نمی‌شود [31-35].

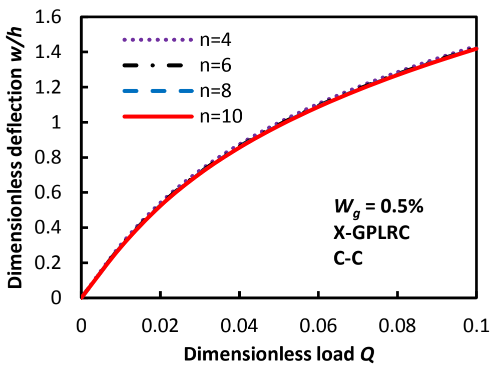


شکل ۸ نمودار ماکزیمم خیز بی‌بعد تیر تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن با کسرهای وزنی متفاوت

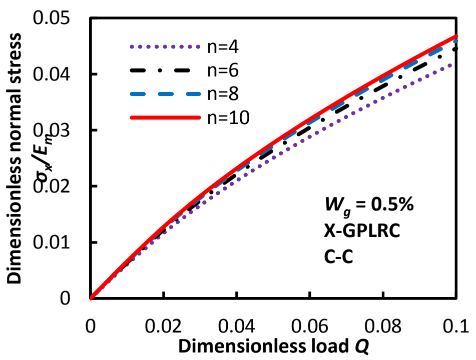


شکل ۹ نمودار ماکزیمم تنش نرمال بدون بعد تیر تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن با کسرهای وزنی متفاوت

در مطالعهٔ دیگری به‌منظور بررسی تأثیر تعداد لایه‌های پلاکت‌های گرافن بر عملکرد خمش تیر تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن، تعداد لایه‌ها از ٤ به ۱۰ افزایش یافته‌است. نتایج خیز و تنش نرمال این مطالعه، برای توزیع X-GPLRC، به‌ترتیب در شکل‌های (۱۰) و (۱۱) نمایش داده‌شده و اختلاف بین نتایج خیز برای تعداد لایه‌های مختلف، کمتر از ۱٪ گزارش شده‌است. با این حال، نتایج تعداد لایه‌ها از ٤ به ۱۰ برای تنش‌های نرمال دارای اختلاف حدود ۱۰٪ بوده و تفاوت بین نتایج با تعداد لایه‌های ۸ و ۱۰ ناچیز گزارش شد. دلیل این امر آن بود که با افزایش تعداد لایه‌ها، خواص درجه‌بندی‌شده پیوسته، برای مواد تیر به‌طور دقیق قابل دست‌یابی است.

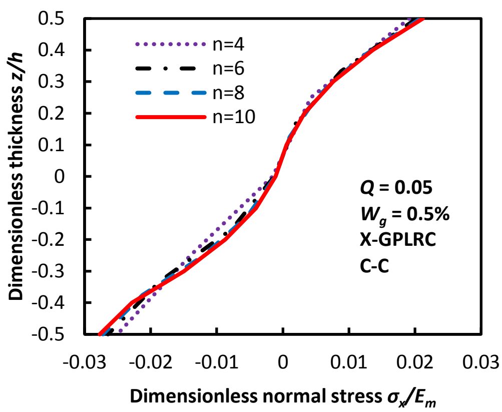


شکل ۱۰ نمودار ماکزیمم خیز بدون بعد تیر تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن با تعداد لایه‌های متفاوت



شکل ۱۱ نمودار ماکزیمم تنش نرمال بدون بعد تیر تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن با تعداد لایه‌های متفاوت

شکل (۱۲) تغییرات تنش نرمال را درراستای ضخامت تیر در x = ۰ نشان می‌دهد که تیر تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن با توزیع X-GPLRC دارای تعداد لایه‌های ٤، ٦، ۸ و ۱۰ است. باتوجه به شکل (۱۲) افزایش تعداد لایه‌های تیر، دلیل تغییرات کمتر در پارامترهای مواد بوده و منجر به ایجاد تنش هموارتری درراستای ضخامت تیر شده‌است. علاوه‌بر این، شکل (۱۲) نشان می‌دهد که تحلیل غیرخطی به یک تنش نرمال غیرصفر در محور میانی تمایل دارد. مقادیر مختلف تنش طبیعی در قسمت‌های بالا و پایین تیر ایجاد و توزیع نامتقارن مشاهده‌شده به‌دلیل فرمول غیرخطی تیر است که در آن کشش صفحهٔ میانی نادیده گرفته نشده‌است. باتوجه به نتایج ارائه‌شده در این بخش، تعداد ۱۰ لایه نتایج مطلوبی را از نظر تغییرات هموار تنش درراستای ضخامت به‌همراه خواهد داشت و می‌توان از روش ساخت لایه‌ای به‌عنوان تقریب بسیار خوبی برای ساخت تیرهای مدرج تابعی معمولی استفاده کرد.



شکل ۱۲ تغییرات تنش نرمال بدون بعد تیر تقویت‌شده با نانوپلاکت‌های گرافن با تعداد لایه‌های متفاوت، درراستای ضخامت تیر

نتیجه‌گیری

در این مقاله تجزیه و تحلیل خمش غیرخطی یک تیر کامپوزیتی تقویت‌شده توسط پلاکت‌های گرافن با الگوهای توزیع متفاوت درراستای ضخامت، بررسی و ارائه شده‌است. معادلات دیفرانسیل حاکم این پژوهش براساس نظریهٔ تغییر شکل برشی مرتبه اول با کمک اصل حداقل انرژی پتانسیل استفاده شده و معادلات دیفرانسیل غیرخطی بااستفاده از روش مربعات دیفرانسیلی هارمونیک حل شده‌است. خواص مکانیکی و مدول مؤثر یانگ کامپوزیت الیافی تقویت‌شده با پلاکت گرافن بااستفاده از مدل میکرومکانیک هالپین- تسای اصلاح‌شده محاسبه شده و از قاعدهٔ اختلاط برای تعیین نسبت پواسون مؤثر استفاده شده‌است. ابتدا، مطالعات مقایسه‌ای بین تیرهای استاندارد کامپوزیتی مدرج تابعی و تیرهایی که توسط پلاکت‌های گرافن تقویت شده‌اند ارائه شده و سپس اثرات شرایط مرزی، کسر وزنی و الگوی توزیع پلاکت‌های گرافن و تعداد کل لایه‌ها بر ویژگی‌های خمش غیرخطی تیرهای کامپوزیتی مورد بررسی قرار گرفته‌است. نتایج این مطالعه نشان‌دهندهٔ قابلیت بالای روش پیشنهادی برای حل مسائل غیرخطی است و نشان می‌دهد که روشی مناسب برای به‌دست آوردن رفتار خمشی تیرهای کامپوزیتی تقویت‌شده است. با افزایش کسر وزنی پلاکت‌های گرافن، مقاومت خمشی تیر بهبودیافته و خیز تیر کاهش می‌یابد. علاوه‌بر این، افزایش تعداد کل لایه‌های کامپوزیت تقویت‌شده با پلاکت گرافن، به ایجاد تنش هموارتری درراستای ضخامت تیر منجر می‌شود. باتوجه به نتایج به‌دست‌آمده، تعداد ۱۰ لایه نتایج مطلوبی را از نظر تغییرات هموار تنش درراستای ضخامت به‌همراه خواهد داشت و می‌توان از روش ساخت لایه‌ای به‌عنوان تقریب بسیار خوبی برای ساخت تیرهای مدرج تابعی معمولی استفاده کرد. همان‌طور که در مرور مطالعات گذشته مشهود است، داده‌های تجربی اندکی برای تیرهای کامپوزیت تقویت‌شده با پلاکت گرافن موجود است و پیشنهاد می‌شود مجموعه‌ای سیستماتیک از آزمایش‌ها برای مطالعات بیشتر در این زمینه ترتیب داده شود.

واژه نامه

پلاکت گرافن	Graphene platelet
روش مربعات دیفرانسیلی هارمونیک	Harmonic differential quadrature method
کامپوزیت تقویت‌شده با پلاکت‌های گرافن	Graphene platelet reinforced composite
مادهٔ مدرج تابعی	Functionally graded material
قانون اختلاط	Rule of mixture
راه‌حل‌های فرم بسته	Closed-form solutions
تغییر شکل برشی مرتبه اول	First-Order Shear Deformation Theory
فرکانس تحریک بار دینامیکی	Frequency of applied dynamic load
محیط‌های حرارتی	Thermal environments
صفحهٔ اورتوتروپیک	Orthotropic plate
تئوری الاستیسیتهٔ غیرمحلی	Nonlocal elasticity theory
حداقل انرژی پتانسیل	Minimum potential energy
ضریب تصحیح برشی	Shear correction factor
میدان‌های جابه‌جایی	Displacement fields
نقطهٔ گسسته	Discrete point
مدول یانگ	Young's modulus
نسبت پواسون	Poisson's ratio
کسر حجمی	Volume fraction
توزیع تصادفی	Randomly oriented

مراجع

1. Hosseini Kordkheili, S. A., and Moshrefzadeh-Sani, H., "Mechanical Properties of Double-Layered Graphene Sheets", *Computational Materials Science*, Vol. 69, Pp. 335-343, (2013).
2. Balandin, A. A., "Thermal Properties of Graphene and Nanostructured Carbon Materials", *Nature Materials*, Vol. 10, No. 8, Pp. 569-581, (2011).
3. Murugan, A. V., Muraliganth, T., and Manthiram, A., "Rapid, Facile Microwave-Solvothermal Synthesis of Graphene Nanosheets and their Polyaniline Nanocomposites for Energy Strorage", *Chemistery of Materials*, Vol. 21, No. 21, Pp. 5004-5006, (2009).
4. Kuila, T., Bose, S., Khanra, P., Mishra, A. K., Kim, N. H., and Lee, J. H., "Recent Advances in

Graphene-Based Biosensors", *Biosensors and Bioelectronics*, Vol. 26, No. 12, Pp. 4637-4648, (2011).

5. Kuilla, T., Bhadra, S., Yao, D., Kim, N. H., Bose, S., and Lee, J. H., "Recent Advances in Graphene Based Polymer Composites", *Progress in Polymer Science*, Vol. 35, No. 11, Pp. 1350-1375, (2010).
6. Schwierz, F., "Graphene Transistors", *Nature Nanotechnology*, Vol. 5, No. 7, Pp. 487-496, (2010).
7. Rafiee, M. A., Rafiee, J., Wang, Z., Song, H., Yu, Z. Z., and Koratkar, N., "Enhanced Mechanical Properties of Nanocomposites at Low Graphene Content", *American Chemical Society Nano*, Vol. 3, No. 12, Pp. 3884-3890, (2009).
8. Hu, K., Kulkarni, D. D., Choi, I., and Tsukruk, V. V., "Graphene-Polymer Nanocomposites for Structural and Functional Applications", *Progress in Polymer Science*, Vol. 39, Pp. 1934-1972, (2014).
9. Guo, Z., Song, L., Boay, C. G., Li, Z., Li, Y., and Wang, Z., "A New Multiscale Numerical Characterization of Mechanical Properties of Graphene-Reinforced Polymer-Matrix Composites", *Composite Structures*, Vol. 199, Pp. 1-9, (2018).
10. Aminivida, H., Shokrollahi, H., and Beigpour, R., "Thermal Stress Analysis of the Carbon Nanotube Reinforced Composite Cylindrical Shells", *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 53, No. 10, Pp.14-14, (2021).
11. King, J. A., Klimek, D. R., Miskioglu, I., and Odegard, G. M., "Mechanical Properties of Graphene Nanoplatelet/Epoxy Composites", *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 128, Pp. 4217-4223, (2013).
12. Liang, J., Wang, Y., Huang, Y., Ma, Y., Liu, Z., and Cai, J., "Electromagnetic Interference Shielding of Graphene/Epoxy Composites", *Carbon*, Vol. 47, Pp. 922-925, (2008).
13. Feng, C., Kitpornchai, S., and Yang, J., "Nonlinear Bending of Polymer Nanocomposite Beams Reinforced with Non-Uniformly Distributed Graphene Platelets (GPLs)", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 110, Pp. 132-140, (2017).
14. Barati, M. R., and Zenkour, A. M., "Analysis of Postbuckling of Graded Porous GPL-Reinforced Beams with Geometrical Imperfection", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 26, No. 6, Pp. 503-511, (2019).
15. Bidgoli, E. R., and Arefi, M., "Free Vibration Analysis of Micro Plate Reinforced with Functionally Graded Graphene Nanoplatelets Based on Modified Strain-Gradient Formulation", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, DOI: 10.1177/1099636219839302, (2019).
16. Yang, S.Y., Lin, W. N., Huang, Y. L., Tien, H. W., Wang, J. Y., Ma, C. C. M., et al., "Synergetic Effects of Graphene Platelets and Carbon Nanotubes on the Mechanical and Thermal Properties of Epoxy Composites", *Carbon*, Vol. 9, Pp. 793-803, (2011).
17. Dong, Y. H., He, L. W., Wang, L., et al., "Buckling of Spinning Functionally Graded Graphene Reinforced Porous Nanocomposite Cylindrical Shells: An Analytical Study", *Aerospace Science*

Technology, Vol. (82-83), Pp. 466-478, (2018).

18. Barati, M. R., and Shahverdi, H., "Finite Element Forced Vibration Analysis of Refined Shear Deformable Nanocomposite Graphene Platelet-Reinforced Beams", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 42, Pp. 33, (2020).
19. Arefi, M., Bidgoli, E. M. R., Dimitri, R., Bacciocchi, M., and Tornabene, F., "Nonlocal Bending Analysis of Curved Nanobeams Reinforced by Graphene Nanoplatelets", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 166, Pp. 1-12, (2019).
20. Ziaee, S., "Free Vibration of Heterostructures of Graphene and Boron Nitride in Thermal Environment Via Aifantis Theory with Velocity Gradients and Ritz Method", *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 50, No. 5, Pp. 1061-1078, (2018).
21. Varzandian, Gh., Ziaee, S., and Farid, M., "Nonlinear Vibration and Stability Analysis of Thermally Postbuckled Double-Layered Graphene Sheet", *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 52, No. 8, Pp. 2177-2194 (2020).
22. Bahrami, M. A., Heshmati, M., and Feli, S., "A Study on the Synergistic Influence of Reduced Graphene Oxide and MWCNTs on the Mechanical Properties of Epoxy Nanocomposite", *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 53, No. 6 (Special Issue), Pp. 13-13, (2021).
23. Wang, Y., Feng, C., Santiuste, C., et al., "Buckling and Postbuckling of Dielectric Composite Beam Reinforced with Graphene Platelets (GPLs)", *Aerospace Science Technology*, Vol. 91, Pp. 208-218, (2019).
24. Choi, J., Shin, H., Yang, S. and Cho, M., "The Influence of Nanoparticle Size on the Mechanical Properties of Polymer Nanocomposites and the Associated Interphase Region: A Multiscale Approach", *Composite Structures*, Vol. 119, Pp. 365-376, (2015).
25. Aluko, O., Gowtham, S., and Odegard, G. M., "The Development of Multiscale Models for Predicting the Mechanical Response of GNP Reinforced Composite Plate", *Composite Structures*, Vol. 206, Pp. 526-534, (2018).
26. Shokrieh, M. M., Ghoreishi, S. M., and Esmkhani, M., "Toughening Mechanisms of Nanoparticle-Reinforced Polymers. In: Toughening Mechanisms in Composite Materials", *Woodhead Publishing*, Pp. 295-320, (2015).
27. Shokrieh, M. M., Esmkhani, M., Shahverdi, H. R., and Vahedi, F., "Effect of Graphene Nanosheets (GNS) and Graphite Nanoplatelets (GNP) on the Mechanical Properties of Epoxy Nanocomposites", *Science of Advanced Materials*, Vol. 5, Pp. 260-266, (2013).
28. Civalek, Ö., and Ülker, M., "Harmonic Differential Quadrature (HDQ) for Axisymmetric Bending Analysis of Thin Isotropic Circular Plates", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 17, No. 1, Pp. 1-14, (2004).

29. Reddy, J., El-Borgi, S., and Romanoff, J., "Non-Linear Analysis of Functionally Graded Microbeams Using Eringen's Non-Local Differential Model", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 67, Pp. 308-318, (2014).
30. Liu, F., Ming, P., and Li, J., "Ab Initio Calculation of Ideal Strength and Phonon Instability of Graphene under Tension", *Physical Review B*, Vol. 76, No. 6, 064120, (2007).
31. Shokrieh, M. M., Esmkhani, M., and Haghighatkhah, A. R., "Mechanical Properties of Graphene/Epoxy Nanocomposites under Static and Flexural Fatigue Loadings", *Mechanics of Advanced Composite Structures*, Vol. 1, Pp. 1-7, (2014).
32. Zegeye, E., Ghamsari, A.K. and Woldesenbet, E., "Mechanical Properties of Graphene Platelets Reinforced Syntactic Foams", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 60, Pp. 268-273, (2014).
33. Nagar, S., Sharma, K., Kukreja, N., and Shukla, M. K., "Micromechanical and Experimental Analysis of Mechanical Properties of Graphene/CNT Epoxy Composites", *Materials Today: Proceedings*, Vol. 26, Pp. 1855-1863, (2020).
34. Mishra, B. P., Mishra, D., Panda, P., and Maharana, A., "An Experimental Investigation of the Effects of Reinforcement of Graphene Fillers on Mechanical Properties of Bi-Directional Glass/Epoxy Composite", *Materials Today: Proceedings*, Vol. 33, Pp. 5429-5441, (2020).
35. Wang, J., Wang, X., Xu, C., Zhang, M., and Shang, X., "Preparation of Graphene/Poly (Vinyl Alcohol) Nanocomposites with Enhanced Mechanical Properties and Water Resistance", *Polymer International*, Vol. 60, Pp. 816-822, (2011).

Nonlinear Bending Analysis of Nanocomposite Beams Reinforced by Graphene Platelets using Harmonic Differential Quadrature Method

Hassan Shokrollahi[1] Reza Beigpour[2]

1. Introduction

Reinforcements in beams play an important role in providing strength and stiffness. The novel materials considered for this aim are graphenes that have extraordinary mechanical, thermal, electrical, and optical properties. Besides, graphenes are encouraging applicants for the design and progress of different applications of nanoelectromechanical systems (NEMS) such as nanocomposites, mass and gas sensors, transistors, and semiconducting devices.

Numerous kinds of graphene's products such as graphene platelet (GPL) and graphene oxide are used broadly in structural components. As shown by the experimental and theoretical works, since graphene has a wide surface to bond with the polymer chains, an excellent interactive action with the polymer matrix forms by using GPLs as reinforcement nanofillers in polymer matrix. In most applications, polymers are used as elastomeric and flexible matrices for composites, due to their favored physical properties. As concluded frequently in previous researches, the small content of graphene can mainly improve the bending behavior of graphene epoxy composite beam. Since the fabrication of a structure by a functionally graded (FG) material, in which the GPL quantity varies continuously through the thickness, is very difficult, a multilayer arrangement for the structure is used. In this case, each layer has a constant GPL weight fraction while proper distribution is used through the thickness.

According to the nonlinear nature of the physical phenomena of the world, modeling each behavior leads to the nonlinear equations. There are the majority of problems in which analytical methods do not exist to solve them. Therefore, proper numerical methods are needed to solve the obtained nonlinear equations. To the best knowledge of the authors, reported works in the literature on nonlinear bending of GPLRC beams were only about the limited cases of boundary conditions, in which exact closed-form solutions are presented using Fourier series. In a few studies, Ritz method has used and the governing equations and solution method have not been presented in an extended way. The aim of this work is to study the nonlinear bending analysis of a composite beam reinforced by graphene platelets (GPL) having non-uniform distribution through the thickness. Governing differential equations are derived based on the first order shear deformation theory by using the minimum potential energy principle. The nonlinear differential equations are solved using the harmonic differential quadrature method (HDQM). The modified Halpin-Tsai micromechanics model is implemented to determine the effective Young's modulus of GPLRC beam. Moreover, the rule of mixture is used to define the effective Poisson's ratio. To ensure the applicability of the method, comparison studies are performed for conventional FG nanocomposite beams and beams reinforced by graphene platelets. Then, the effects of the boundary conditions, the number of layers, the weight fraction and the distribution pattern of GPL on the nonlinear bending characteristics of the GPLRC beams are investigated.

2. Formulation and governing equations

Figure 1 shows a beam that consists of n-layer GPL-polymer nanocomposites with total thickness h and length L. Each layer contains the polymer matrix reinforced by GPLs and has a constant thickness $h_1 = h/n$ and a distinct GPL weight fraction (Wg%). Through the thickness of the beam, the distribution of the layers may be uniform (UD) or functionally graded (FG). The GPL patterns considered in this study are shown in Figure 1. In the X-GPLRC type, the upper and the lower face of the beam has the highest Wg% while the Wg% decreases linearly toward the mid plane. Moreover, the GPL weight fraction in the O-GPLRC beam increases linearly from the outer faces toward the mid plane. It means that the maximum value of Wg% is observed at the mid plane and the minimum ones are seen in the upper and lower faces.

Nonlinear governing differential equations are derived based on the first order shear deformation theory by using the minimum potential energy principle. The modified Halpin-Tsai micromechanics model is implemented to determine the effective Young's modulus of GPLRC beam. Moreover, the rule of mixture is used to define the effective Poisson's ratio. By using the HDQM for discretizing the system of equations, the following assembled nonlinear equations are obtained:

[1] Corresponding Author: Assistant Professor of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kharazmi University, Tehran, Iran. Email: hshokrollahi@khu.ac.ir
[2] MSc. of Mechanical Engineering, Department of Engineering, Kharazmi University, Tehran, Iran.

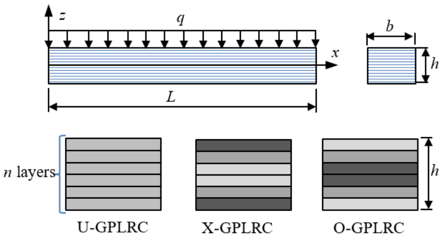


Figure 1. Schematic configuration of GPLRC beam with three different GPL distribution patterns

$$[K_L]\begin{Bmatrix}\{u\}_N\\\{\phi\}_N\\\{w\}_N\end{Bmatrix}+[K_{NL}]\begin{Bmatrix}\{\{u\}\{w\}\}_{N^2}\\\{\{\phi\}\{w\}\}_{N^2}\\\{\{w\}\{w\}\}_{N^2}\\\{\{w\}\{w\}\{w\}\}_{N^3}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{0\}_{2N+1}\\\{q\}_{N-2}\\\{0\}_1\end{Bmatrix} \qquad (1)$$

in which K_L and K_{NL} are linear and nonlinear stiffness matrices, which have $3N\times3N$ and $3N\times(3N^2+N^3)$ dimensions, respectively. To solve the nonlinear equations, an iterative scheme based on Newton-Raphson method is adapted. Using MATLAB program and according to the presented formulations, a computer program is written by which the displacements and stresses of the beam are obtained. It is worth noting that the linear response of the beam can be obtained by setting $[K_{NL}] = [0]$.

3. Results and discussion

In this section, the results for verification of the proposed method are presented. To investigate the convergence of the proposed solution method, several cases with the different number of grid points were examined. This convergence study discovered that choosing 31 grid points along x direction will yield a sure answer in all problems in question. Therefore, in all up-coming case studies, 31 grid points along x direction were used. The nonlinear bending results are depicted in Figure 2. In this figure, the present results for deflection of clamped FGM beams are compared with those of other researches. The Young's modulus of the FG material is supposed to be graded in thickness direction $E(z)=(E_1-E_2)\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^p+E_2$

in which p is the functionally graded index of the material properties. The beam material and geometrical properties are $E_1 = 30\times10^6$ psi, $E_2 = 10\times10^6$ psi, $\nu = 0.4$, $b/h = 1$, $b = 1$ in, and $L/h = 100$. As can be seen in Figure 2, the present results (HDQM) match very well with the previous ones. As another case study for the examination of the proposed method, the work done by Feng et al is considered. In this case, the polymer matrix is assumed to be epoxy with $E_m = 2.85$ GPa and $\rho_m = 1200$ kg/m^3. The beam is comprised of 10 layers having the thickness of $h = 0.1$ m and $L/h = 20$. The dimensions, Young's modulus and mass density of GPLs are $a_g = 2.5$ µm, $b_g = 1.5$ µm, $t_g = 1.5$ nm, $E_g = 1010$ GPa, and $\rho_g = 1060$ kg/m^3, respectively. The maximum deflections of the GPL-Epoxy beam with different boundary conditions and GPL weight fraction (Wg%) are presented in Table 1 for the dimensionless uniform load of Q = 0.001. As shown in Table 1, the present results match well with the previous ones reported in Feng et al.

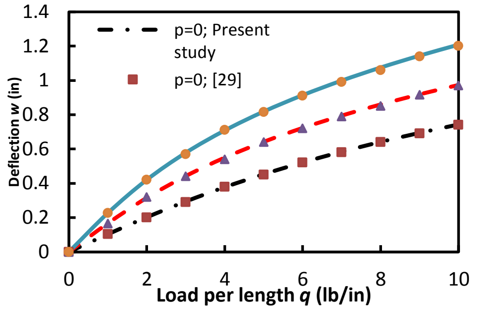


Figure 2. Load versus center transverse deflection for clamped-clamped, and functionally graded beams

Table 1. Maximum dimensionless deflection of GPL/Epoxy nanocomposite beams

		U-GPLRC		X-GPLRC	
	W_g%	Present	Ref	Present	Ref
C-C	0.5	0.004441	0.004745	0.003430	0.003680
	1	0.002718	0.002902	0.001997	0.002144
	1.5	0.001958	0.002090	0.001408	0.001513
S-S	0.5	0.021821	0.022988	0.016742	0.017659
	1	0.013344	0.014058	0.009730	0.010269
	1.5	0.009610	0.010124	0.006856	0.007239
C-S	0.5	0.009116	0.009697	0.007012	0.007481
	1	0.005575	0.005712	0.004078	0.004197
	1.5	0.004015	0.004114	0.002874	0.002960

4. Conclusion

The nonlinear bending analysis of a composite beam reinforced by graphene platelets (GPL) having functionally graded (FG) distribution through the thickness was presented. Moreover, the rule of mixture was used to define the effective Poisson’s ratio. At first, comparison studies were presented for conventional FG nanocomposite beams and beams reinforced by graphene platelets. Then the effects of boundary conditions, weight fraction and distribution pattern of GPL, and the total number of layers, on the nonlinear bending characteristics of the GPLRC beams were investigated. The results showed the capability of the proposed method to solve the nonlinear problems and obtaining the bending behavior of the beams. Moreover, by increasing the weight fraction of graphene platelets in the beam, the bending strength of the beam improves and the beam deflection decreases. Moreover, increasing the total number of layers for GPLRC tends to smoother variation of stress through the beam thickness. As can be concluded from the literature, there are few experimental data for the GPLRC beams. It is suggested to conduct a systematic set of experiments for futurer studies in this matter.